

ANÁLISE ADIMENSIONAL DA CINEMÁTICA DE ARREMESSO E QUEDA LIVRE DE UM CORPO UTILIZANDO O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Vinicius S. da Cunha^a,

Vinicius E. S. Ramos^a,

Rômulo Maziero^b

^a Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo - Brasil

^b Centro Estadual de Educação Técnica Talmo Luiz Silva - Brasil

Contato para informações
vinicius.cunha@ifes.edu.br

RESUMO

Modelos matemáticos são utilizados para representar sistemas físicos reais. Utilizando modelagem matemática podemos representar o movimento de um corpo em queda livre levando em consideração a resistência do ar. Aplicando a solução analítica desse sistema e comparando-a com a solução numérica pelo método de Runge-Kutta de quinta ordem é possível verificar se as soluções numéricas aproximam-se da solução analítica em questão. Os resultados numéricos obtidos através de simulação apresentaram acurácia com erro na ordem de 10^{-4} para tamanhos de passo que não inviabilizam o cálculo da solução em termos computacionais.

Palavra-chave: Modelagem matemática; queda livre; Runge-Kutta.

INTRODUÇÃO

Os fenômenos naturais podem ser descritos em termos matemáticos. Esta descrição matemática de um determinado sistema real é chamada de modelos matemáticos.

A construção de um modelo matemático de um sistema se inicia pela identificação das variáveis. O nível de resolução do modelo é especificado a medida que é adicionado mais variáveis ao sistema. Em seguida, um conjunto de hipóteses razoáveis sobre o sistema descrito deve ser elaborado, incluindo quaisquer leis empíricas aplicáveis ao sistema.

Como as hipóteses sobre um sistema envolvem frequentemente uma taxa de variação de uma ou mais variáveis, a descrição matemática de todas essas hipóteses pode ser uma ou mais equações envolvendo derivadas. Portanto modelos matemáticos são representados muitas vezes por uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais.

Ao obter o modelo matemático é preciso analisar se ele apresenta soluções consistentes com dados experimentais ou fatos conhecidos sobre o comportamento do modelo. Caso as soluções sejam pobres ou insuficientes, é preciso elevar o nível de resolução do modelo ou levantar hipóteses alternativas ao sistema. A Figura 1 a seguir demonstra que o processo como um todo pode ser continuamente refinado até se obter a solução

satisfatória em termos da representatividade do sistema real.

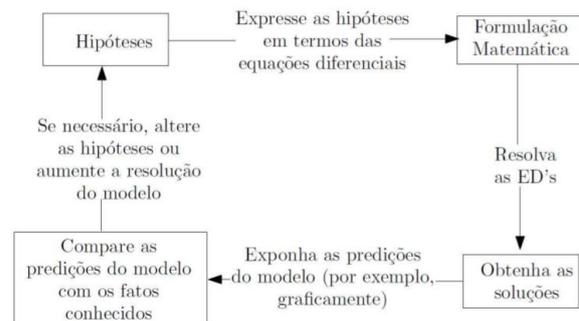


Figura 1. Processo metodológico [1].

No intuito de demonstrar o processo de modelagem matemática de um sistema se propõe a analisar o movimento de queda livre de um corpo utilizando a solução analítica e numérica através do método de Runge-Kutta de quinta ordem considerando a resistência do ar.

Solução analítica – movimento de queda livre

Um corpo de massa m em queda livre ou arremessado verticalmente com velocidade inicial v_0 está sujeito à ação gravitacional e ao arrasto do ar. A

primeira força atrai o objeto para baixo, enquanto a outra se opõe ao movimento, seja ele ascendente ou descendente. Essa situação é ilustrada pela Figura 2.

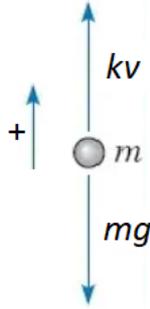


Figura 2. Diagrama de corpo livre de um corpo em queda livre [2].

Note que foi adotado o sentido positivo para cima. A força peso é consequência da ação gravitacional, cujo vetor é dado pela expressão $\vec{P} = m\vec{g}$, cuja orientação é sempre vertical no sentido para baixo, m é a massa do objeto e \vec{g} o vetor de aceleração gravitacional. A força de arrasto pode ser linearizada e calculada por $\vec{F} = -k\vec{v}$, onde k é o coeficiente de arrasto e v é a velocidade do corpo. O sinal negativo decorre do fato desta força ser sempre contrária a velocidade.

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

Visto ser um problema unidimensional, consideramos os sentidos das forças com sinais matemáticos adequados e podemos abandonar a notação vetorial, obtendo:

$$-mg - kv = ma \quad (2)$$

$$-g - \frac{k}{m}v = \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

As equações (2) e (3) são válidas tanto para quando o corpo tem movimento ascendente quanto descendente, pois aplicando o sinal positivo para velocidade ascendente ou negativo para velocidade descendente a força de arrasto fica considerada adequadamente. Para solucionar essa Equação Diferencial Ordinária (EDO) utilizamos a técnica de substituição de variáveis, fazendo:

$$u = -g - \frac{k}{m}v \quad (4)$$

$$\frac{du}{dv} = -\frac{k}{m} \quad (5)$$

$$dv = -\frac{m}{k} du \quad (6)$$

Substituindo as equações (4) e (6) na equação (3), organizando os termos e integrando temos:

$$\int_{v_0}^v \frac{du}{u} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt \quad (7)$$

O resultado da integração é:

$$\ln(u)|_{v_0}^v = -\frac{k}{m} t|_0^t \quad (8)$$

Desfazendo a substituição de variáveis através da equação (4):

$$\ln\left(-g - \frac{k}{m}v\right)|_{v_0}^v = -\frac{k}{m} t|_0^t \quad (9)$$

$$\ln\left(-g - \frac{k}{m}v\right) - \ln\left(-g - \frac{k}{m}v_0\right) = -\frac{k}{m} t \quad (10)$$

Resolvendo a equação (10) obtemos a expressão da velocidade em função do tempo para um corpo em queda livre:

$$v(t) = -\frac{mg}{k} \left[1 - \left(1 + \frac{k}{mg}v_0 \right) e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t} \right] \quad (11)$$

A partir da equação (2) podemos calcular a velocidade terminal (v_t), isto é, a velocidade máxima em queda livre, pois neste instante $\frac{dv}{dt} = 0$. Aplicando esta condição chegamos facilmente a:

$$v_t = -\frac{mg}{k} \quad (12)$$

Substituindo a equação (12) na equação (11) temos:

$$v(t) = v_t \left[1 - \left(1 - \frac{v_0}{v_t} \right) e^{\left(\frac{g}{v_t}\right)t} \right] \quad (13)$$

Note que a expressão $\frac{v}{v_t}$ é dimensional, assim como $\frac{g}{v_t}t$. Assim, podemos definir a velocidade adimensional V , o tempo adimensional τ e a velocidade inicial adimensional V_0 como:

$$V = \frac{v}{v_t} \quad (14)$$

$$\tau = -\frac{g}{v_t} t \quad (15)$$

$$V_0 = \frac{v_0}{v_t} \quad (16)$$

Substituindo as equações (14), (15) e (16) em (13) obtemos a equação adimensional de velocidade para:

$$V(\tau) = 1 - (1 - V_0)e^{-\tau} \quad (17)$$

Onde $V = 1$ representa a velocidade terminal. Ainda, velocidades adimensionais negativas indicam que o corpo tem movimento ascendentes, enquanto velocidades adimensionais positivas indicam que o corpo tem movimento descendente. Isso acontece pois a velocidade terminal v_t é negativa.

Podemos determinar o tempo em que o objeto atinge a máxima altura no caso de uma velocidade inicial positiva (ou uma velocidade adimensional negativa). Em qualquer uma destas variáveis, o ponto de máxima altura apresenta velocidade nula. A partir da equação de velocidade adimensional, podemos obter este valor facilmente:

$$\tau = \ln(1 - V_0) \quad (18)$$

Para $V_0 < 0$.

A posição do objeto pode ser calculada facilmente integrando a equação (13) no tempo. O resultado é:

$$x(t) = v_t \left[t - \left(1 - \frac{v_0}{v_t}\right) \frac{v_t}{g} e^{\left(\frac{g}{v_t}\right)t} \right] + C \quad (19)$$

Para definir a constante de integração C usamos a condição inicial $x(t = 0) = x_0$. Dessa forma, o valor calculado para a constante de integração é:

$$C = x_0 + \frac{v_t}{g} (v_t - v_0) \quad (20)$$

Substituindo e organizando os termos obtemos:

$$x(t) = v_t t - v_t \left(\frac{v_t - v_0}{g}\right) e^{\left(\frac{g}{v_t}\right)t} + x_0 + \frac{v_t}{g} (v_t - v_0) \quad (21)$$

Para adimensionalizar a equação (21) dividimos a equação por $\frac{v_t}{g} (v_t - v_0)$:

$$x(t) \frac{g}{v_t(v_t - v_0)} = \frac{g}{(v_t - v_0)} t - e^{\left(\frac{g}{v_t}\right)t} + \frac{x_0 g}{v_t(v_t - v_0)} + 1 \quad (22)$$

Definimos a posição adimensional X e a posição inicial adimensional X_0 como:

$$X = \frac{x(t)g}{v_t(v_t - v_0)} \quad (23)$$

$$X_0 = \frac{x_0 g}{v_t(v_t - v_0)} \quad (24)$$

Por esta adimensionalização, uma altura adimensional zero implica também numa altura com medida zero. Aplicando as equações (23) e (24) na equação (22) obtemos a equação (25):

$$X(t) = \frac{g\tau}{(v_t - v_0)} - e^{\left(\frac{g}{v_t}\right)t} + X_0 + 1 \quad (25)$$

Utilizando de algebrismos matemáticos e as equações (15) e (16) na equação (25), obtemos finalmente a equação da posição adimensional:

$$X(\tau) = \frac{\tau}{(V_0 - 1)} - e^{-\tau} + X_0 + 1 \quad (26)$$

Se o objeto for arremessado para cima ele atingirá uma altura máxima. Pela equação (18) temos o tempo adimensional em que isto acontece. Basta substituir este valor na equação (26) e temos a altura adimensional máxima atingida:

$$X_{max} = \left(\frac{\ln(1 - V_0) + 1}{(V_0 - 1)}\right) + X_0 + 1 \quad (27)$$

Poderíamos calcular as velocidades de um objeto arremessado para cima ao passar novamente pela altura de lançamento e a velocidade de impacto. Para isso, bastaria isolar a variável τ na equação 26, e teríamos uma função $\tau = \tau(X)$. Porém, ao fazer isso obtemos uma equação transcendente, cuja solução geralmente é resolvida numericamente pelos métodos de obtenção de raízes de equações.

Não vamos adotar esta estratégia, visto que utilizaremos o método de Runge-Kutta, descrito a seguir, para solucionar a EDO. Assim, vamos comparar a solução numérica com a solução analítica, validando o método de Runge-Kutta, e a partir dele faremos observações de interesse.

Método de Runge-Kutta

As soluções analíticas de modelos matemáticos de problemas físicos geralmente são obtidas se o modelo matemático for simplificado em relação ao problema físico real. Os modelos mais simples e menos precisos geralmente são modelados por equações lineares.

Quando a modelagem matemática representa mais detalhadamente o modelo físico as equações ficam mais complexas e pode ser difícil ou inviável resolver o problema analiticamente. Assim, métodos numéricos costumam ser utilizados para obter mais facilmente a solução do problema físico através de

aproximações matemáticas que alcancem resultados satisfatórios.

Segundo Chapra [3] os métodos de Runge-Kutta alcançam uma precisão similar de uma abordagem por série de Taylor, porém sem a necessidade de cálculos de derivadas de ordem superiores. Existem variações dos métodos, mas de um modo genérico a equação pode ser escrita como:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (28)$$

Onde $\phi(x_i, y_i, h)$ é definida como função incremento, que pode ser a representação da inclinação em um intervalo de tempo, e h é o passo de cálculo, isto é, o intervalo em que a solução será calculada. Chapra [3] descreve genericamente a função incremento como:

$$\phi = a_{n1}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{nn}k_n \quad (29)$$

Em que os a 's são constantes e os k 's são:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (30)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \quad (31)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \quad (32)$$

...

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n}k_{n-1}h) \quad (33)$$

À medida que a ordem do método aumenta, os resultados tornam-se mais acurados. O método de Runge-Kutta de primeira ordem ($n=1$) é equivalente ao método de Euler, enquanto o método de segunda ordem ($n=2$) se equivale à série de Taylor que tem maior precisão que o método de Euler.

Chapra [3] afirma que “quando resultados mais acurados forem necessários, o método de Runge-Kutta de quinta ordem de Butcher [4] é recomendado”. Para este método, a função incremento é dada por:

$$\phi(x_i, y_i, h) = \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (34)$$

Em que:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (35)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h) \quad (36)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h) \quad (37)$$

$$k_4 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2h + k_3h) \quad (38)$$

$$k_5 = f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h) \quad (39)$$

$$k_6 = f(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h) \quad (40)$$

A função $f(x, y)$ para cada valor k é definida pela própria equação diferencial a ser resolvida. Para tanto, a EDO deve estar na seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (41)$$

O método de Runge-Kutta também pode ser utilizado para resolver sistemas de EDO's, por exemplo, da forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z) \end{aligned} \quad (42)$$

Basta que seja calculado um valor de função incremento para cada uma das equações do sistema de EDO's.

Este recurso também é utilizado para resolver EDO's de maiores ordens. Para tanto, uma substituição de variáveis deve ser feita. Seja, por exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + f(x, y) \quad (43)$$

Para aplicar o método de Runge-Kutta, substituímos a derivada por uma nova variável, reduzindo a ordem da equação. Assim, seja:

$$\frac{dy}{dx} = z \quad (44)$$

Substituindo a equação (44) na equação (43) temos:

$$\frac{dz}{dx} = z + f(x, y) = g(x, y, z) \quad (45)$$

Desse modo, as equações (44) e (45) formam um sistema de EDO's de primeira ordem no formato de resolução do método de Runge-Kutta.

No tocante à ordem do método, a Figura 3 a seguir apresenta a comparação do erro relativo porcentual versus o esforço computacional para os métodos Runge-Kutta de primeira a quinta ordem.

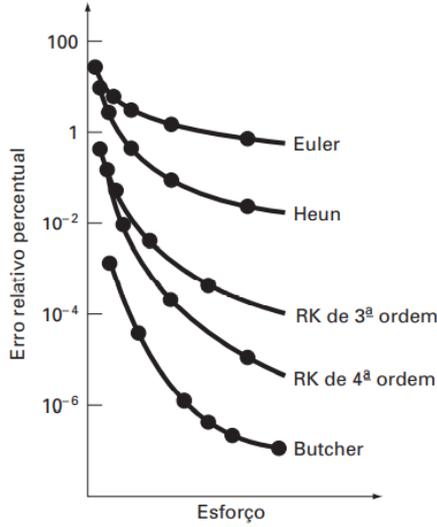


Figura 3. Erro relativo x esforço computacional dos métodos de Runge-Kutta de primeira a quinta ordem [3].

Aplicação do Método de Runge-Kutta

Visto que calculamos as soluções analíticas adimensionais, precisamos de EDO's adimensionais para comparar o método de Runge-Kutta com a solução analítica.

Retomando equação (3) para adimensionalizar temos:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m} v \quad (46)$$

$$\frac{dv}{dt} \frac{1}{g} = -1 - \frac{k}{mg} v = -1 + \frac{v}{v_t} \quad (47)$$

Note que utilizamos a equação (12). Aplicando a equação (14) chegamos a:

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = V - 1 \quad (48)$$

Para adimensionalizar os elementos diferenciais precisamos estabelecer relações diferenciais entre as variáveis dimensionais e adimensionais. Para obter a relação diferencial de velocidade adimensional em relação ao tempo adimensional, fazemos:

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (49)$$

Onde $\frac{dV}{dv} = \frac{1}{v_t} e \frac{dt}{d\tau} = -\frac{v_t}{g}$

Assim:

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{1}{v_t} \frac{dv}{dt} \left(-\frac{v_t}{g} \right) \quad (50)$$

$$\frac{dV}{d\tau} = -g \frac{dV}{d\tau} \quad (51)$$

Logo:

$$\frac{1}{g} (-g) \frac{dV}{d\tau} = V - 1 \quad (52)$$

$$\frac{dV}{d\tau} = 1 - V \quad (53)$$

Do mesmo modo, temos para a posição:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \frac{dX}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{g}{v_t(v_t - v_0)} \frac{dx}{dt} \left(-\frac{v_t}{g} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{(v_0 - v_t)} \right) v \\ &= (v_0 - v_t)^{-1} V = \left(\frac{v_0}{v_t} - 1 \right)^{-1} v_t^{-1} v \\ \frac{dX}{d\tau} &= \left(\frac{v_0}{v_t} - 1 \right)^{-1} \frac{v}{v_t} = (V_0 - 1)^{-1} V = \frac{V}{V_0 - 1} \quad (55) \end{aligned}$$

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{V}{V_0 - 1} \quad (56)$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um fator importante para o bom desempenho do método de Runge-Kutta é determinar o tamanho do passo h a ser dado na simulação. Passos maiores implicam em menor tempo de simulação e resultados menos acurados. O compromisso entre desempenho e exatidão é um fator de bom desempenho do método.

Desta forma resolveremos um problema com posição inicial $X_0 = 3$ e $V_0 = -3$ para 4 tamanhos de passos diferentes comparando com a solução analítica para validar o método de Runge-Kutta implementado no software Octave. Em todos eles a simulação foi feita até o tempo adimensional 30, uma vez que, a partir desse tempo a pior solução já estabiliza. Os resultados são mostrados nas Figuras 4, 5, 6 e 7.

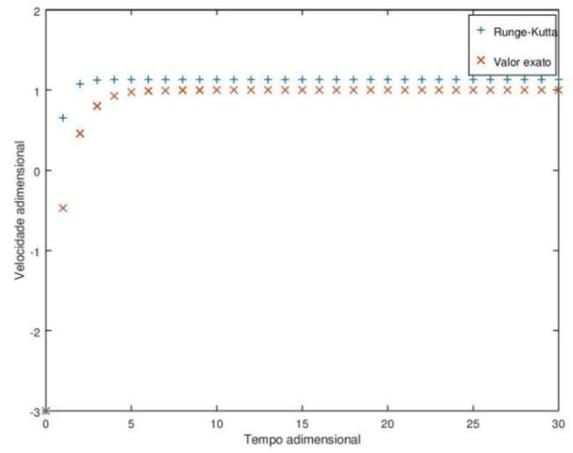
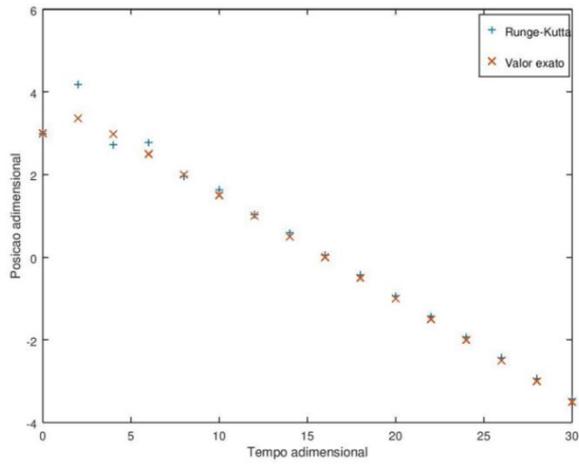


Figura 5. Comparação do método analítico com o método de Runge-Kutta para posição e velocidade adimensional com passo $h = 1,0 \times 10^0$.

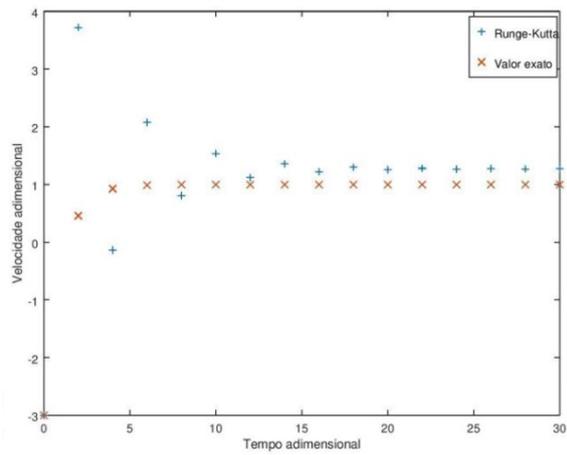


Figura 4. Comparação do método analítico com o método de Runge-Kutta para posição e velocidade adimensional com passo $h = 2,0 \times 10^0$.

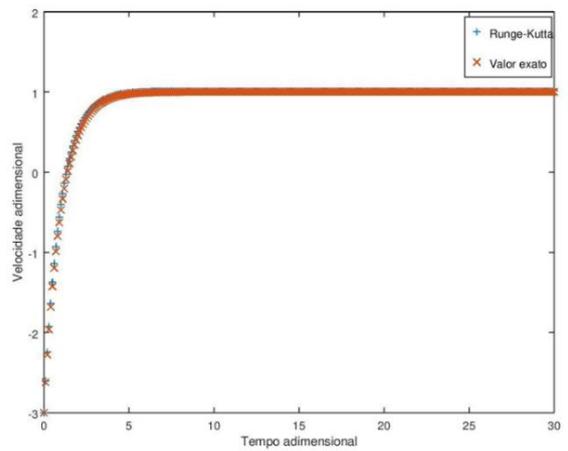
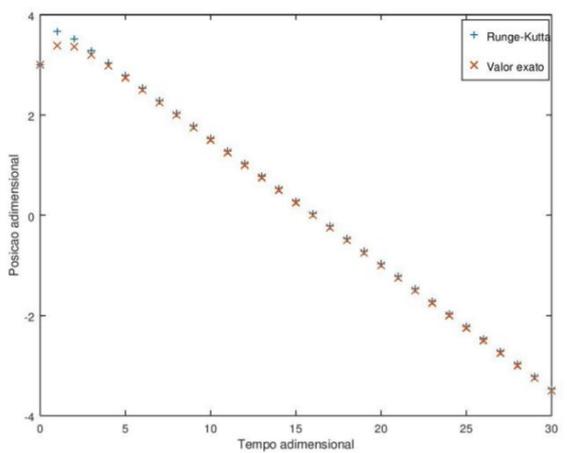
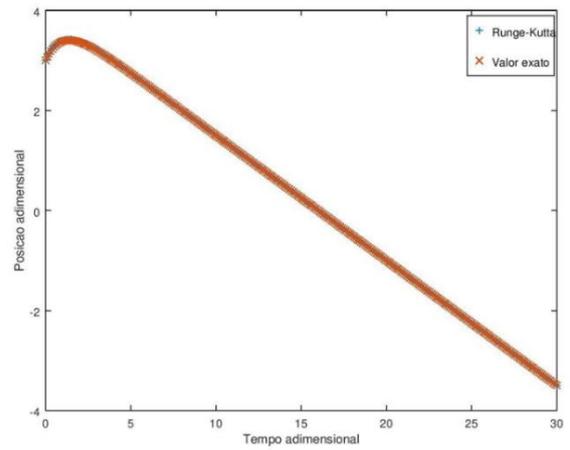


Figura 6. Comparação do método analítico com o método de Runge-Kutta para posição e velocidade adimensional com passo $h = 1,0 \times 10^{-1}$.

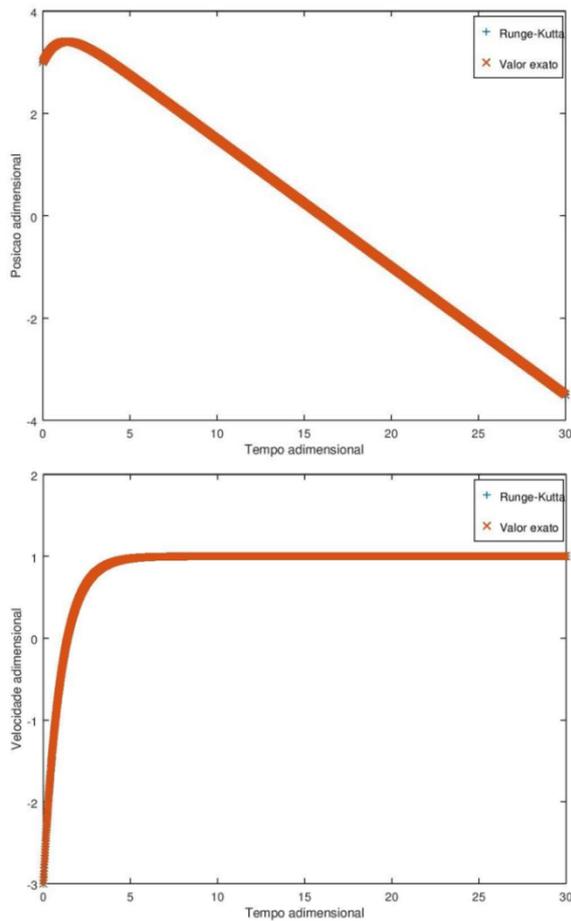


Figura 7. Comparação do método analítico com o método de Runge-Kutta para posição e velocidade adimensional com passo $h = 1,0 \times 10^{-2}$.

Os gráficos mostram que a redução do tamanho do passo permitiu a melhoria do resultado numérico fazendo que os valores calculados numericamente se aproximassem muito bem a solução exata do problema. Para deixar mais claro essa melhoria, foram calculados os erros relativos médios e máximos para a posição e a velocidade em cada um dos exemplos. Os valores são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1. Valores de erros máximos e médios para posição e velocidade.

Tamanho do Passo	Posição - Erro Máximo	Posição - Erro Médio	Velocidade - Erro Máximo	Velocidade - Erro Médio
$2,0 \times 10^0$	$1,8689 \times 10^{-1}$	$4,462 \times 10^{-2}$	$2,2369 \times 10^0$	$3,1278 \times 10^{-1}$
$1,0 \times 10^0$	$6,4233 \times 10^{-2}$	$1,6505 \times 10^{-2}$	$7,6513 \times 10^{-1}$	$1,0284 \times 10^{-1}$
$1,0 \times 10^{-1}$	$3,7418 \times 10^{-3}$	$1,5809 \times 10^{-3}$	$6,2288 \times 10^{-2}$	$9,4164 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-2}$	$3,6168 \times 10^{-4}$	$1,5738 \times 10^{-4}$	$6,1281 \times 10^{-3}$	$9,3398 \times 10^{-4}$

Pode-se observar que todos os valores de erros reduziram atingindo valores médios da ordem de 10^{-4} , que são valores de erros satisfatórios para

aproximações numéricas. Desta forma, o código é validado e foi determinado utilizar o passo de 10^{-2} para as próximas análises.

Ainda, é possível observar o tempo gasto para o objeto atingir sua máxima altura nestes casos. Considerando que as duas primeiras simulações têm passo demasiado grande, fazemos a busca da máxima altura e do tempo em que isso aconteceu apenas nas simulações com passo de tamanho 10^{-1} e 10^{-2} . Pela equação (18) e tomando a velocidade inicial $V_0 = -3$, tem-se que o tempo exato para isso é de $\tau = 1,3863$. Com passo de 10^{-1} , o valor encontrado foi de $\tau = 1,40$, enquanto para um passo de 10^{-2} , o valor encontrado de tempo foi de $\tau = 1,390$. Os dois são os resultados mais próximos do valor exato considerando a resolução utilizada.

Outro dado interessante é o tempo necessário para atingir 90% da velocidade terminal. Este tempo foi medido somente na simulação com passo de 10^{-2} . Obteve-se um resultado de $\tau = 3,67$.

Uma das vantagens do uso de soluções adimensionais é a redução do número de variáveis do problema, facilitando o estudo dos resultados. No estudo do problema deste trabalho não é preciso se preocupar com o valor da massa do objeto e do coeficiente de arrasto, pois estes valores interagem com o valor da aceleração da gravidade e resultam no valor de velocidade terminal, que com a adimensionalização tem valor sempre igual a 1. Assim, a velocidade inicial de partida é sempre um valor relativo da velocidade terminal.

A adimensionalização do tempo também permite análise menos dependentes do tempo. O tempo adimensional igual a 1 representa o tempo que um objeto partindo do repouso em queda livre sem sofrer arrasto aerodinâmico gasta para atingir um valor de velocidade igual à velocidade terminal.

A adimensionalização da posição também tem um significado interessante. O valor de posição adimensional igual a 1 representa a distância percorrida pelo objeto até atingir a velocidade terminal, partindo com uma velocidade inicial V_0 , sem sofrer arrasto do ar.

Avaliando um segundo problema onde vamos verificar o resultado de uma queda livre simples, com velocidade inicial nula (Figura 8).

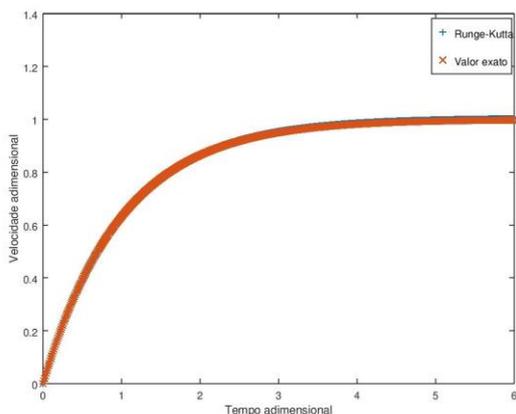


Figura 8. Velocidade em queda livre.

Como de se esperar a velocidade é assintótica para a velocidade terminal ($V=1$). Também foi possível identificar que o objeto em queda livre atinge 90% de sua velocidade terminal no tempo $\tau = 2,26$. Observa-se que este tempo é compatível com a diferença dos tempos para atingir 90% da velocidade terminal e atingir a altura máxima, do problema anterior ($3,67 - 1,39 = 2,28$). Isto é coerente tendo em vista que uma vez que um objeto arremessado para cima atinge sua altura máxima, ele inicia uma queda livre, assim como foi simulado neste caso.

CONCLUSÃO

Os resultados numéricos obtidos nas simulações apresentam aderência a solução analítica mostrando a acurácia do método de Runge-Kutta de quinta ordem de Butcher (1964). O erro apresenta ordem 10^{-4} com tamanho de passo que não inviabiliza o cálculo da solução em termos de custo computacional.

Outra vantagem do método é a simplicidade de sua implementação. Os cálculos envolvidos se resumem as operações básicas da aritmética e não exige solução de sistemas lineares (computacionalmente custoso dependendo da ordem do sistema). Por outro lado, a solução analítica envolve o cálculo de integrais, que dependendo do problema podem ser de difícil solução ou nem haver uma solução.

A modelagem matemática discutida considera apenas equações diferenciais lineares cuja solução analítica é bem mais simples do que nos problemas de equações diferenciais não-lineares. Apesar de não ter sido apresentado, a literatura mostra que o método de Runge-Kutta é poderoso para solução de equações diferenciais não lineares, cuja solução analítica é mais difícil de ser obtida do que para problemas lineares.

Então o método pode ser utilizado para solucionar o problema de queda livre com arrasto proporcional ao quadrado da velocidade comparando

com os resultados de arrasto linear com a velocidade, verificando o erro obtido pela linearização do problema.

REFERÊNCIAS

1. Benevides, P. F. Notas de aula de Equações Diferenciais. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.
2. Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. LTC, 1989.
3. Chapra, S. C.; Canale, R. P. Métodos Numéricos para Engenharia, 7ª Ed. McGraw Hill Brasil, 2016.
4. Butcher, J. C. On Runge-Kutta Processes of Higher Order. J Austral. Math. Soc., v. 4, p. 179, 1964.